Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III
CI-2523 Ene-Mar 2011

> *¡Absteneos!*—Hay hombres nefastos que, en lugar de resolver un problema, lo oscurecen para todos los que se ocupan de él y le hacen más difícil de resolver. El que no sepa dar en el blanco que se abstenga de tirar.
>
> El viajero y su sombra, Federico Nietzsche.

Tarea 3—Resolución de Recurrencias

NOMBRE CARNET NOTA

1. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencia lineales homogéneas con coeficientes constantes:

   a) $x_n - 3x_{n-1} = 0, \quad x_0 = 2$
   b) $x_n = 7x_{n-1} - 12x_{n-2}, \quad x_0 = 0, x_1 = 2$
   c) $x_n - 5x_{n-1} + 8x_{n-2} - 4x_{n-3} = 0, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$
   d) $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2x_{n-3}, \quad x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$
   e) $x_n - 2x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0, \quad x_0 = 1, x_1 = 4$
   f) $x_n - 16x_{n-4} = 0, \quad x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 8$

2. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencia lineales no-homogéneas con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particular:
   $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = f_n \quad n \geq 2$ si:

   a) $f_n = 0, x_0 = 0, x_1 = 2$
   b) $f_n = n2^n, x_0 = 1, x_1 = 3$
   c) $f_n = n + 1, x_0 = 0, x_1 = 2$
   d) $f_n = n2^n + n^2, x_0 = 1, x_1 = 2$ (Use el método de combinación)
   e) $f_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, x_0 = 1, x_1 = 2$

3. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencia lineales no-homogéneas con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particula:
   $x_n + 4x_{n-2} = f_n \quad n \geq 2$ si:

   a) $f_n = n2^n, x_0 = 0, x_1 = 1$
   b) $f_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, x_0 = 0, x_1 = 2$
   c) $f_n = n2^n + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, x_0 = 0, x_1 = 2$ (Use el método de combinación)

4. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencia lineales no-homogéneas con coeficientes constantes usando el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particular:
   $x_n - 5x_{n-1} + 8x_{n-2} - 4x_{n-3} = f_n \quad n \geq 3$ si:

   a) $f_n = n2^n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$
   b) $f_n = n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$
   c) $f_n = 3^n, x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 3$
   d) $f_n = n2^n + n + 3^n, x_0 = 1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ (Use el método de combinación)
   e) $f_n = \cos \frac{n\pi}{2}, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$

5. Demuestre que si U_n y W_n son soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden k con coeficientes constantes: $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = 0 \quad n \geq k$ y coinciden en los primeros k términos (esto es: $U_i = W_i$ si $0 \leq i < k$), entonces son iguales—coinciden para todo i. Sug.: Use inducción generalizada para probar que si $m \geq k$ y las dos sucesiones coinciden para todos los valores menores que m también coinciden para m.

6. Demuestre que si λ es una raiz de multiplicida 2 del polinomio característico de la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes $a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$, entonces λ^n y $n\lambda^n$ son linealmente independientes y generan el espacio de soluciones de dicha ecuación. Sug.: Use como referencia el caso resuelto en clases: dos raices reales y difentes.

7. Repita el problema anterior para el caso en que las dos raices sean complejos conjugados.

8. Demuestre que si U_n^h es la solución general de la ecuación homogenea asociada a la ecuación $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = f_n \quad n \geq k$ y U_n^p es una solución arbitraria de la ecuación no-homogénea, entonces $U_n^h + U_n^p$ es **la solución** de general de la ecuación no-homogénea.

9. **Combinación de Soluciones.** Demuestre que si U_n^p es solución particular de la ecuación $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = f_n \quad n \geq k$ y W_n^p es una solución particular de ecuación $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = g_n \quad n \geq k$, entonces $U_n^p + W_n^p$ es una solución particular de la ecuación $a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots a_kx_{n-k} = f_n + g_n \quad n \geq k$.